

den Auffängerkristall gestreut werden, was natürlich zu Koinzidenzen führt. Die ausgezogene Linie deutet den Mittelwert an Koinzidenzen an, der in dem untersuchten Teil des Spektrums auf Grund der Wilson-Kammerergebnisse⁴ zu erwarten wäre. Legt man die dort gegebene spektrale Verteilung zugrunde, so ergibt die Auswertung dieser Messung, daß die Zahl der positiven Partikeln, die von ^{32}P in Koinzidenz mit einem zweiten ionisierenden Teilchen emittiert werden, kleiner als $3 \cdot 10^{-5}$ /Zerfall ist.

Dr. W. B. Mann, Leiter der Radioactivity Section des National Bureau of Standards, Washington, bin

ich für die Möglichkeit, die Koinzidenzuntersuchung in seiner Abteilung ausführen zu können, sehr zu Dank verpflichtet. Größten Dank schulde ich Dr. R. W. Hayward für seine dauernde Förderung dieser Arbeit durch Diskussion und Ratschläge. Die Messungen im Trochoidenspektrometer wurden von Herrn Georg Tisljar-Lentulis im Rahmen seiner Dissertation ausgeführt.

Anm. b. d. Korr.: Das Isotop ^{32}Si wurden inzwischen von Lindner¹⁶ aufgefunden; es zeigt eine langlebige β^- -Aktivität mit etwa 100 keV Zerfallsenergie.

¹⁶ M. Lindner, Physic. Rev. 91, 642 [1953].

Theorie des Anodenfalls

Von W. BEZ und K.-H. HÖCKER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. 9a, 72–81 [1954]; eingegangen am 10. August 1953)

Es wird unter gewissen modellmäßigen Annahmen auf Grund der Kinetik der Ladungsträger versucht, den Anodenfall eines normalen Lichtbogens qualitativ und quantitativ zu verstehen. Die Potentialdifferenz vor der Anode beschleunigt die Elektronen derart, daß sie die innerhalb der Bogensäule in Richtung Kathode wandernden Ionen erzeugen können. Die Überführung der Fallbewegung der Ionen in ungeordnete Bewegung wird dargestellt.

Die klassische Unterteilung des Lichtbogens in Kathodenfall, Bogensäule und Anodenfall trägt keineswegs ausschließlichen Charakter. Grundlegend für jeden Bogen dürfte der Kathodenfall sein. Da das Kathodenmaterial i. a. keine ausreichende Zahl von Elektronen emittiert, müssen diese im kathodenseitigen Gasraum erzeugt werden. Das geschieht mittels eines thermischen Mechanismus^{1,2,3} in einem Raumladungsgebiet im Anschluß an den eigentlichen Kathodenfall, der nur eine Ausdehnung von ungefähr einer Ionengewglänge besitzt. Hieran schließt sich gewöhnlich die eigentliche Säule an, die durch Quasineutralität und thermische Ionisation gekennzeichnet ist. Es könnte aber auch das Raumladungsgebiet vor der Kathode direkt in den anodenseitigen Mechanismus übergehen, so daß man nicht von einer ausgedehnten Säule reden kann. Anodenfall und Kathodenfall sind dann nicht zu trennen. Von diesem Fall wollen wir hier absehen.

Vielmehr wollen wir ausdrücklich einen solchen Bogen voraussetzen, der eine Säule mit thermischem, quasineutralem Plasma aufweist. Diese bestimmt in unserer Überlegung die Randbedingung für den Anodenfall. Da die Anode in der Regel keine Ionen emittiert (Beck-Bögen bleiben außer Betracht), muß im Anodenfall durch Stoßionisation der Elektronen sekundlich jene Zahl von Ionen erzeugt werden, die innerhalb der Säule in Richtung Kathode abwandert. Neueste Messungen über die Dicke des Anodenfalls^{4,5} zeigten eindeutig, daß die notwendige Ionisierungsenergie nicht über eine erhöhte thermische Energie des Plasmas gewonnen wird. Die Sonden, die in den Bogen in Richtung auf die Anodenstirnfläche hineingeschossen wurden, zeigten nämlich einen Zusammenbruch des Potentials erst bei einem Abstand von $\sim 10^{-3}$ cm vor der Anode, d. h. die Dicke des Anodenfalls ist von der Größe einer Elektronengewglänge. Beachtet man,

¹ W. Weizel, R. Rompe u. M. Schön, Z. Physik 115, 179 [1940].

² W. Weizel u. R. Rompe, Z. Physik 119, 366 [1942].

³ W. Weizel, Z. Physik 131, 170 [1952].

⁴ W. Finkelnburg u. S. M. Segal, Physic. Rev. 83, 3, 582 [1951].

⁵ M. J. Block u. W. Finkelnburg, Z. Naturforschg. 8a, 758 [1953].



daß die Potentialdifferenz zu 20 ± 1 V gemessen wurde⁶, so ergibt sich als adäquate Interpretation dieses Befundes, daß die ganze Potentialdifferenz von den Elektronen quasi frei durchfallen wird, und daß diese so hoch ist, daß die Elektronen das Trägergas ionisieren können. (Die Ionisierungsspannung von Sauerstoff- und Stickstoffatomen beträgt 13,5 bzw. 14,5 V.)

Die qualitativen Fakten sollen im folgenden zu einer widerspruchsfreien Theorie ausgebaut werden. Erste Ansätze dazu stammen von Finkelnburg und Heinzmann^{7,8}, beschreiben aber die Elektronenbewegung mittels Beweglichkeiten und errechnen entsprechend einen dickeren Anodenfall von 0,1 cm, der mit den neuen empirischen Daten nicht verträglich ist.

Unsere Rechnung bringt mit sich, daß nur ein kleiner Teil der Elektronen einen Ionisationsstoß ausführen kann. Das ist aber vollauf ausreichend. Bei Quasineutralität ist in der Säule $\varrho^+ = \varrho^-$. Da sich die Ströme (d. h. Zahl der Teilchen, die pro sec durch den Querschnitt gehen) wie $b^- : b^+ = 4 \cdot 10^7 : 4,5 \cdot 10^4$ verhalten, brauchen 1000 Elektronen nur 1,1 Ionen zu erzeugen.

Während wir eine bis einige Elektronenweglängen als obere Grenze für die Ausdehnung des Anodenfalls ansehen, sind einige Ionenweglängen eine untere. Denn würden die Ionen, ebenso wie die Elektronen, den Anodenfall frei durchfallen, so wäre am Säulenende kein thermisches Gleichgewicht möglich. Außerdem würden frei durchfallende Ionen eine Abnahme der positiven Ladungsdichte in Richtung Säule bedingen, was bei der Quasineutralität des Säulenplasmas eine positive Raumladung im Anodenfallgebiet bedeutet. Dies läßt sich aber mit dem Spannungsverlauf nicht vereinbaren. So ist man gezwungen anzunehmen, daß die Ionen im Fall mehrfach stoßen. In Anbetracht der oberen Grenze, die sich durch eine bis einige Elektronenweglängen ausdrücken läßt, bedeutet dies, daß man mit fünf bis zehn Ionenweglängen zu rechnen hat.

Für die genaue Durchrechnung legen wir einen in Luft frei brennenden Kohlebogen zugrunde. Die Stromdichte eines solchen Bogens ist bis zu 50—60 Amp. Stromstärke ziemlich konstant gleich 40 Amp./cm² = $1,2 \cdot 10^{11}$ cgs-Einheiten.

⁶ Mitteilung von W. Finkelnburg bei der Fachtagung für Gasentladungsphysik in Bonn, Juli 1952.

⁷ H. Heinzmann, Diplomarbeit Straßburg 1944,

1. Unterteilung des Anodenfallgebietes in Beschleunigungsgebiet, Ionisationsgebiet und Übergangsgebiet

Da Stoßionisationen eine Mindestenergie von eU_i pro Ionisationsstoß erfordern, liegt der Gedanke nahe, das Anodenfallgebiet in zwei Gebiete aufzuteilen.

1. Beschleunigungsgebiet. Es dient zur Aufnahme der zur Ionisation erforderlichen Mindestenergie. In ihm findet keine Stoßionisation statt. Der Elektronen- und der Ionenstrom bleiben konstant gleich dem Wert, den sie in der Säule besitzen.

2. Ionisationsgebiet. Die im Beschleunigungsgebiet mit der nötigen Energie versehenen, im Ionisationsgebiet stoßenden Elektronen besitzen dort die Möglichkeit, neutrale Atome zu ionisieren. Der Elektronenstrom nimmt in Richtung auf die Anode zu, der Ionenstrom in gleichem Maße ab. Die Summe beider muß natürlich konstant sein.

3. Übergangsgebiet. Neben Beschleunigungs- und Ionisationsgebiet ist die Einführung eines Übergangsgebietes zweckmäßig. Experimentell haben wir beim Niederstrombogen einen Anodenfall von 20 V. Der Anstieg der Spannung soll auf einer Strecke erfolgen, die ungefähr bei einer freien Weglänge der Elektronen liegt, d. h. $5 \cdot 10^{-3}$ cm. Dies kann nur möglich sein, wenn gleich zu Beginn des Beschleunigungsgebietes eine erhebliche negative Raumladung herrscht, was wegen

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -4\pi\varrho$$

einer starken Krümmung der Kurve $U(x)$ gleichkommt. Da in der Säule die Raumladung verschwindet, bedeutet dies, daß in einem Teil am Anfang des Anodenfallgebietes die positive Raumladung stark absinkt. Dieses Gebiet bezeichnen wir als Übergangsgebiet. Wenn man an die Bewegung der Ionen denkt, kann man es auch so charakterisieren: Aus dem Ionisationsgebiet kommen die Ionen mit einer Fallbewegung heraus. Diese wird im angrenzenden Beschleunigungsgebiet mehr oder weniger beibehalten, da das Potentialgefälle noch groß ist. Im Übergangsgebiet aber wird sie in eine ungeordnete Bewegung abgebogen, wie es der Anschluß an die Säule verlangt. In bezug auf die Bewegung der Elektronen ist das Übergangsgebiet ein Teil des

⁸ W. Finkelnburg, Hochstrom-Kohlebogen, Springer-Verlag 1948, S. 177.

Beschleunigungsgebietes; da wir es jedoch gesondert behandeln, nehmen wir es aus dem Zusammenhang mit diesem Gebiet heraus und kommen dann zu der durch Abb. 1 gegebenen schematischen Darstellung des Anodenfallgebietes. Wir haben ein Koordinatensystem eingeführt, dessen positive x -Achse in Richtung auf die Anode zeigt und dessen Nullpunkt an der Grenze Anodenfallgebiet-Bogensäule liegt. Wir rechnen wie die früheren Arbeiten eindimensional und vernachlässigen alle radialen Randeffekte.

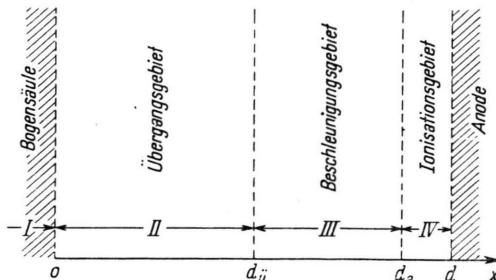


Abb. 1. Die Aufteilung des Anodenfallgebietes.

Als x -Werte, die die einzelnen Gebiete voneinander abgrenzen, haben wir

d_u Grenze: Übergangsgebiet — Beschleunigungsgebiet,

d_a Grenze: Beschleunigungsgebiet — Ionisationsgebiet,

d Grenze: Ionisationsgebiet—Anode.

Für die Ausdehnung der einzelnen Gebiete geben wir zur Orientierung die folgende Übersicht:

1. Anodenfallgebiet. Seine Ausdehnung liegt in der Größenordnung der freien Weglänge der Elektronen.
2. Übergangsgebiet. Wir schätzen, daß die Dicke des Übergangsgebietes größer als eine freie Weglänge der Ionen ist.
3. Ionisationsgebiet. Da beim Niederstrombogen in Luft die Ionisierungsspannung U ungefähr mit 14 V anzusetzen ist und der gesamte Anodenfall nach der Messung $U(d) = 20$ V beträgt, entfällt auf das Ionisationsgebiet nur ein Spannungsanstieg von $U(d) - U_i = 6$ V. Setzt man linearen Potentialanstieg voraus, so wird das Ionisationsgebiet weniger als $\frac{1}{3}$ der Ausdehnung des gesamten Anodenfalls betragen. Da aber $U(x)$ eine monoton ansteigende Funktion ist, wird das Ionisationsgebiet nur einen noch merklich kleineren Teil beanspruchen.

§ 2. Der Ionisierungsmechanismus

Ein Elektron ausreichender kinetischer Energie ($> eU_i$) wird nicht bei jedem Stoß ionisieren. In

dem uns interessierenden Energiebereich ist die Ionisierungswahrscheinlichkeit weitgehend proportional zur Energie der Elektronen. Es gilt:

$$q^* = qC(U - U_i) = qf(U), \quad (1)$$

q geometrischer Atom- und Molekülquerschnitt, $f(U)$ Ausbeutefunktion; C hängt von der Natur jedes einzelnen Gases und dessen Dichte ab. In Tab. 1 stellen wir die Werte nach Messungen von Smith⁹ zusammen.

Die Messungen der Größe a sind recht unvollständig. So ist für unsere Zwecke nicht der Wert für Luft zu übernehmen, da es sich hierbei um ein Molekülgas handelt. In unserem Falle liegen aber Temperaturen von mehreren tausend Grad vor.

Gas	Ordnungszahl	$a_0 = C/\lambda_0 = CqN_0$
He	2	0,046
Ne	10	0,055
Ar	18	0,71
Hg	80	0,82
H_2	—	0,22
N_2	—	0,3
O_2	—	0,24
Luft	—	0,26

Tab. 1. Werte der Konstanten der differentiellen Ionisierung für verschiedene Gase bei $T = 273^\circ$ und $p = 1$ Torr, für diese Bedingungen mit a_0 bezeichnet. λ_0 freie Weglänge der Elektronen, N_0 Dichte der neutralen Teilchen bei $T = 273^\circ$ und $p = 1$ Torr.

Die Anode weist 4000° auf; in der Säule beträgt die Temperatur 7000° . Bei letzterem Wert sind Stickstoff und Sauerstoff vollkommen dissoziiert, bei der Anodentemperatur nur teilweise. Da die Gastemperatur sehr steil auf die Anodentemperatur abfällt, wird man durchweg atomare Luft annehmen müssen, um die wirklichen Verhältnisse zu approximieren. Wir schätzen a ab auf Grund der Tatsache, daß es mit der Ordnungszahl der Elemente zu wachsen scheint. Wir interpolieren daher zwischen He und Ne und führen einen nur rechnerisch zu benutzenden Wert für atomare Luft bei $T = 273^\circ$ K und $p = 1$ Torr ein: $a_0 = 0,05/cm^{-1}V^{-1}$, der auf Bogenverhältnisse umgerechnet ($T = 6400^\circ$ als Mittelwert der Temperatur, $p = 760$ Torr) lautet

$$a_{\text{Luft}} = a_0 \frac{\lambda_0}{\lambda_e} \cdot 300 = 344 \text{ cgs-E.}$$

Für λ_e benutzen wir den Wert, der sich durch

$$\lambda_e = 1/Nq \quad (2)$$

⁹ P. T. Smith, Physic. Rev. **36**, 1293 [1930].

ergibt, da für die Ionisationen nur die Stöße in Frage kommen, die mit neutralen Atomen erfolgen. Für die Berechnung aller kinetischen Vorgänge dagegen ist

$$\lambda_{\text{eff}} = 1/(Nq + N^+ q^+) \quad (3)$$

maßgebend¹⁰.

§ 3. Das Gleichungssystem zur Berechnung des Beschleunigungs- und Ionisationsgebiets

Wir betrachten zunächst die Stromdichten:

Den Elektronenstrom $j^-(x)$ spalten wir in drei Anteile auf:

$j_1^-(x)$ bezieht sich auf Elektronen, die aus der Säule stammen und ohne Ionisationsstoß an die Stelle x gelangt sind.

$j_2^-(x)$ bezieht sich auf Elektronen, die aus der Säule stammen und irgendwo bei $\xi \leq x$ ionisieren.

$j_3^-(x)$ gehört zu Elektronen, die bei $\xi \leq x$ durch Ionisation entstanden sind.

Aus diesen Definitionen folgen unmittelbar die Beziehungen:

$$j_1^-(x) + j_2^-(x) + j_3^-(x) = j^-(x), \\ j_2^-(x) = j_3^-(x), \quad (4)$$

$j_1^-(x) + j_2^-(x) = j_s^-$ (Elektronenstrom der Säule),

$j^+(x) + j_3^-(x) = j_s^+$ (Ionenstrom der Säule).

Auf Grund des Ionisierungsmechanismus (§ 2) ergibt sich, daß die Änderung des Ionenstroms im Ionisationsgebiet ($x > d_a$)

$$dj^+(x) = -C(U - U_i) j_1^-(x) \frac{dx}{\lambda_e}. \quad (5)$$

Unter Beachtung des Gleichungssystems (4) folgt

$$j^+(x) = j_s^+ - j_s^- \left[1 - \exp \left\{ -\frac{C}{\lambda_e} \int_{d_a}^x (U - U_i) dx \right\} \right], \\ j^-(x) = j_s^- \left[2 - \exp \left\{ -\frac{C}{\lambda_e} \int_{d_a}^x (U - U_i) dx \right\} \right]. \quad (6)$$

Da die Stoßwahrscheinlichkeit $\frac{dx}{\lambda_e} \ll 1$, kann die Exponentialfunktion durch einen linearen Ausdruck ersetzt werden, so daß

¹⁰ Die Thomsonsche Formel (J. Thomson, Philos. Mag. **23**, 449 [1912]; G. Elwert, Z. Naturforschg. **7a**, 432 [1952]) bietet keinen Ausweg aus dieser Schwierigkeit, weil sie nur für die höchsten Ionisationsstufen abgeleitet ist. Für die erste Ionisation gibt sie falsche Werte.

$$j^+(x) = j_s^+ - j_s^- \frac{C}{\lambda_e} \int_{d_a}^x (U - U_i) dx, \\ j^-(x) = j_s^- \left[1 + \frac{C}{\lambda_e} \int_{d_a}^x (U - U_i) dx \right]. \quad (6a)$$

In $j^-(x)$ wird man den Zusatzterm für die meisten Fragen weglassen können, denn er macht nicht mehr als 10% aus. In $j^+(x)$ geht dies natürlich nicht. Vielmehr definiert diejenige Stelle x , für die $j^+(x)$ verschwindet, das Ende des Anodenfalls. Wir bezeichnen diese Stelle mit d .

Die Stromgleichungen werden durch die nachstehenden Relationen zu einem vollständigen Gleichungssystem, das die Bestimmung des Spannungsverlaufs im Beschleunigungs- und Ionisationsgebiet ermöglicht, ergänzt. Da wir Beschleunigungs- und Ionisationsgebiet so definiert haben (§ 1), daß hier die positive Ladungsdichte gegenüber der negativen Ladungsdichte vernachlässigbar ist, ferner der Ionenstrom gegenüber dem Elektronenstrom bedeutungslos und $j^- = j_s^- = j_s = \text{const}$ zu setzen ist, gilt ein relativ einfaches Gleichungssystem zur Bestimmung von $U(x)$. Es lautet:

$$\varrho = \varrho^-; \quad j_s = \varrho^- \sqrt{2eU/m}; \quad \frac{d^2 U}{dx^2} = -4\pi\varrho. \quad (7)$$

Aus diesem Gleichungssystem erhalten wir durch Elimination von ϱ als Differentialgleichung für $U(x)$ die Gleichung

$$U'' = \frac{4\pi j_s}{\sqrt{2e/m}} \cdot U^{-\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Sie wird in einfachster Weise durch den Ansatz

$$U = 3 \sqrt[3]{\frac{3m\pi^2 j_s^2}{2e}} \cdot x^{4/3} = A x^{4/3}. \quad (9)$$

gelöst.

Dies ist die bekannte Langmuirsche Formel. Allerdings stellt sie nur ein partikuläres Integral ohne irgendwelche Konstanten dar, durch die die Lösung den vorgegebenen Randbedingungen angepaßt werden könnte. Die Randbedingungen der partikulären Lösung sind bei $x = 0$:

$$U = 0; \quad U' = 0.$$

Diese Bedingungen sind hier nicht erfüllt, da wir an der Stelle $x = d_i$ an das Übergangsgebiet anzuschließen haben und hier für $x = d_i$ die noch zu berechnenden Randwerte $U = U(d_i)$ und $U' = U'(d_i)$ vorgeschrieben sind. Um zu einer allgemeinen Lösung zu kommen, führen wir die nachfolgende Integration durch. Aus Gl. (8) entsteht für $p(U) = U'$

$$p' p = \frac{4\pi j}{\sqrt{2} e/m} U^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{wobei } p' = \frac{dp}{dU}.$$

Die erste Integration ergibt

$$p^2 - U'^2(d_i) = 8\pi j_s \sqrt{2m/e} [U^{\frac{1}{2}} - U^{\frac{1}{2}}(d_i)].$$

Mit den Abkürzungen

$$-C_1 = -8\pi j_s \sqrt{2m/e} \cdot U^{\frac{1}{2}}(d_i) + U'^2(d_i)$$

$$\text{und } \alpha = 8\pi j_s \sqrt{2m/e}$$

schreibt sich

$$\frac{dp}{dx} = p = \sqrt{\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1}. \quad (10)$$

In dieser Gleichung sind die Variablen zu trennen, die zweite Integration ist möglich. Es ergibt sich

$$x = d_i + \frac{4}{\alpha^2} \left[\frac{1}{3} (\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1)^{\frac{3}{2}} + C_1 (\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1)^{\frac{1}{2}} \right] - C_2, \quad (11)$$

wobei die Integrationskonstante

$$C_2 = \frac{4}{\alpha^2} \left(\frac{1}{3} U'^3(d_i) + C_1 U'(d_i) \right)$$

ist.

Damit haben wir die allgemeine Lösung des Differentialgleichungsproblems gefunden. Die zwei Integrationskonstanten C_1 und C_2 in der angegebenen Form garantieren, daß der Potentialverlauf stetig und differenzierbar an den Potentialverlauf im Übergangsgebiet angeschlossen werden kann. Den Funktionsverlauf $x = f(U)$ zeigt Abb. 2. Zum Ver-

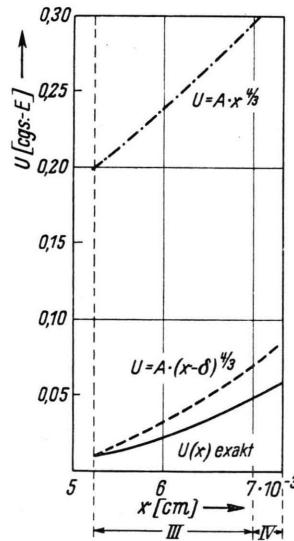


Abb. 2. Vergleich der exakten Lösung mit partikulären Lösungen für die Spannungsfunktion im Beschleunigungs- (III) u. Ionisationsgebiet (IV). $U = A x^{\frac{1}{2}}$ stimmt mit der exakten Lösung am säulenseitigen Ende des Fallgebietes ($x = 0$) überein. In $U = A (x - \delta)^{\frac{1}{3}}$ ist δ so gewählt, daß Übereinstimmung zu Beginn des Beschleunigungsgebietes ($x = 5,2 \cdot 10^{-3}$ cm) besteht.

gleich mit der allgemeinen Lösung sind die Kurven der partikulären Integrale $U = A x^{\frac{1}{2}}$ und $U = A (x - \delta)^{\frac{1}{3}}$ in die Darstellung aufgenommen.

Zur Berechnung des Ionenstromes, durch die wir das Ende des Anodenfalls gewinnen, ist Gl. (6a) mit Hilfe von Gl. (11) zu integrieren. Da der Potentialverlauf nur in Form der Umkehrfunktion $x = f(U)$ anzugeben ist, ist Gl. (6a) durch folgende Gleichung zu ersetzen:

$$j^+(x) = j_s^+ - j_s^- \frac{C}{2\lambda_e} (U - U_i) x + j_s^- \frac{C}{\lambda_e} \frac{U}{v_i} \int f(U) dU. \quad (12)$$

Deren Integral ist

$$j^+(x) = j_s^+ - j_s^- \frac{C}{\lambda_e} (U - U_i) x + j_s^- \frac{C}{\lambda_e} (d_i - C_2) (U - U_i) + j_s^- \frac{C}{\lambda_e} \frac{16}{9\alpha^4} \left[\frac{3}{7} (\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1)^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{5} C_1 (\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1)^{\frac{5}{2}} \right]_{U=U_i}^{U=U} + j_s^- \frac{C}{\lambda_e} \frac{16 C_1}{\alpha^4} \left[\frac{1}{5} (\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3} C_1 (\alpha U^{\frac{1}{2}} - C_1)^{\frac{3}{2}} \right]_{U=U_i}^{U=U}. \quad (13)$$

§ 4. Das Gleichungssystem zur Berechnung des Übergangsgebiets

Im Übergangsgebiet entfällt jede Ionisierung, so daß wir hier einfach

$$j^+ = j_s^+ = \text{const}$$

setzen. Andererseits können wir in

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = -4\pi\varrho$$

nicht mehr $\varrho \approx \varrho^-$ annehmen [vgl. Gl. (7)]. Vielmehr ist jetzt die positive Ladungsdichte zu berücksichtigen

$$\varrho = \varrho^+ - \varrho^-. \quad (15)$$

ϱ^- findet man aus¹¹

$$j_s = \varrho^- \sqrt{2e U/m + (b^-)^2 E_s^2} \quad (16)$$

während ϱ^+ aus

$$j_s^+ = \varrho^+ v \quad (17)$$

zu berechnen ist, wobei allerdings v zunächst unbekannt ist. Ein Verfahren zur Berechnung der Fortschreitungsgeschwindigkeit der Ionen in dem in-

¹¹ Im allgemeinen ist $(b^-)^2 E_s^2 \ll 2eU/m$, so daß dieses Glied, abgesehen von der Grenzzone, unterdrückt werden kann.

homogenen Feld des Anodenfalls haben wir in einer früheren Arbeit angegeben; es führt zu zwei simultanen Differentialgleichungen¹²

$$-\frac{M}{2} \frac{dv^2}{dx} = eU' - \frac{4}{3} \frac{M}{\lambda_i} f v^2, \quad (18)$$

$$-\frac{d v_{th}^2}{dx} = \frac{8}{9} v^2 \frac{f}{\lambda_i} - \frac{1}{2} (v_{th}^2 - v_{th,G}^2) \frac{f}{\lambda_i}, \quad (19)$$

die über die Größe

$$f = \sqrt{1 + v_{th}^2/v^2} \quad (20)$$

gekoppelt sind. f variiert im Gebiet des Anodenfalls beträchtlich, wie man leicht einsieht. An der säulen-seitigen Grenze ist $v \ll v_{th}$; im Gebiet großer Potentialdifferenzen wird dagegen $v \gg v_{th}$. Man kommt daher mit Gl. (18) allein neben der Potentialgleichung nicht aus, sondern braucht die Kenntnis von v_{th} .

Gl. (18) ist linear in v^2 , wenn man von dem Vorkommen von v in f absieht. Kann man f/λ_i als konstant behandeln, lautet das Integral zwischen ξ und x :

$$v^2(x) = e^{\frac{8}{3} \frac{f}{\lambda_i} (x - \xi)} \cdot \left\{ v^2(\xi) - \frac{2e}{M} \int_x^\xi U' \cdot e^{-\frac{8}{3} \frac{f}{\lambda_i} (x - \tilde{x})} dx \right\}. \quad (21)$$

Die Voraussetzung ist aber in Strenge keineswegs zutreffend. Wenn wir uns aber auf ein kleines Intervall $\xi \dots x$ beschränken, gilt (21) näherungsweise. Für ein solches Intervall können wir auch U' konstant setzen und das Integral in (24) ausrechnen.

Es gilt, wenn wir Gl. (21) auf ein Intervall $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ anwenden, folgende Formel für die Werte von v^2 :

$$v^2(x_{i+1}) = \frac{3\lambda_i}{8f(x_i)} \frac{2e}{M} U'(x_i) + e^{\frac{8f(x_i)}{3\lambda_i} x} \left\{ v^2(x_i) - \frac{3\lambda_i}{8f(x_i)} \frac{2e}{M} U'(x_i) \right\}. \quad (22)$$

Das Integral ist für die numerische Behandlung des Übergangsgebietes bei den von uns gewählten Intervallen genauer als die Differentialgleichung.

Die Integration der Differentialgleichung für v_{th}^2 [Gl. (17)] geht analog. Sie liefert im Intervall zwischen ξ und x folgende Formel:

¹² W. Bez u. K.-H. Höcker, Z. Naturforschg. 9a, 64 [1954]. Die dort eingeführte Größe a haben wir mit dem Wert 3/4 entsprechend der hier benutzten Beweglichkeitsformel eingesetzt.

$$v_{th}^2(x) = v_{th,G}^2 + e^{\frac{f}{2\lambda_i}(x-\xi)} \left\{ v_{th}^2(\xi) - v_{th,G}^2 - \frac{8f}{9\lambda_i} \int_\xi^x v^2 \cdot e^{-\frac{f}{2\lambda_i}(x-\tilde{x})} dx \right\}. \quad (23)$$

Ebenso wie bei Gl. (21) formulieren wir durch Anwendung dieser Gleichung auf Intervalle $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ eine Näherungsformel für v_{th}^2 , indem wir v^2 abschnittsweise konstant halten. Es ergibt sich

$$v_{th}^2(x_{i+1}) = v_{th,G}^2 + \frac{16}{9} v^2(x_i) + e^{\frac{f(x_i)}{2\lambda_i} x} \left\{ v_{th}^2(x_i) - v_{th,G}^2 - \frac{16}{9} v^2(x_i) \right\}. \quad (24)$$

Wir schreiben nun noch die Potentialgleichung unter Eliminierung der Ladungsdichten für das Intervall von $x_i \dots x_{i+1}$ hin:

$$-\frac{1}{4\pi} U''(x_{i+1}) = \frac{j_s^-}{\sqrt{2eU(x_i)/m + (b^-)^2 E_s^2}} - \frac{j_s^+}{v(x_{i+1})}. \quad (25)$$

Die Gln. (22), (24) und (25) gestatten, das Übergangsgebiet punktweise zu berechnen, wenn man die Gastemperatur und damit $v_{th,G}$ kennt. Für letzteres legen wir ungefähr die Säulenwerte zugrunde ($T = 6400^0$). Das bedeutet eine gewisse Ungenauigkeit, die jedoch nicht groß sein kann, da das Übergangsgebiet noch weitgehend Säulenverhältnisse aufweist. Wir kommen nachher darauf zurück.

§ 5. Das Integrationsverfahren im Übergangsgebiet

Wenn man das allgemeine Gleichungssystem, bestehend aus (22), (24) und (25), auf die Bogensäule anwendet, so wird infolge der Randbedingungen $U'' \equiv 0$, $v' \equiv 0$, $v'_{th} \equiv 0$. Wir können die Lösungen $v(x)$, $v_{th}(x)$ und $U(x)$, die sich hieraus ergeben, als triviale Lösungen bezeichnen. Die nicht-trivialen, eigentlich Lösungen, die im Übergangsgebiet interessieren, sind charakterisiert durch

$$U'' \neq 0, \quad v' \neq 0, \quad v'_{th} \neq 0.$$

Man brauchte zu ihrer Bestimmung die Randbedingungen am anodenseitigen Ende des Übergangsgebietes. Wir kennen diese nicht, sondern müssen numerisch so integrieren, daß wir vom Übergangsgebiet über Beschleunigungs- und Ionisationsgebiet den Randwert an der Anode erreichen. Die Funktionen im Übergangsgebiet unterscheiden sich von

denen der Säule. Wir setzen für den ersten Schritt nach der Säulengrenze an:

$$\begin{aligned} U''(1) &= U''_{\text{Säule}} + \Delta U'', \\ v^2(1) &= v_{\text{Säule}}^2 + \Delta v^2, \\ v_{\text{th}}^2(1) &= v_{\text{th,Säule}}^2 + \Delta v_{\text{th}}^2, \end{aligned} \quad (26)$$

d. h. wir fordern, daß bei Vorwärtsschreiten um eine Strecke $1 \cdot \Delta x$ in Richtung Anode kleine Abweichungen von den Randwerten auftreten. Als Schritte Δx wählen wir $1 \cdot 10^{-5}$ cm. Die Anfangswerte an der Grenze Bogensäule–Übergangsgebiet sind durch die Theorie voneinander abhängig, da zu jeder Koordinate x ein bestimmtes Zahlentripel gehört. Welchen Δ -Wert wir als frei betrachten, ist prinzipiell gleichgültig. Allerdings ist mit der Einführung beliebiger Δ -Werte nicht gewährleistet, daß die Lösung der Differentialgleichung automatisch in der von uns gesuchten Richtung geht. Vielmehr hat das Gleichungssystem (22), (24), (25) auch Lösungen, die nicht den Bedingungen des Anodenfalls entsprechen. So ist z. B. jener Fall enthalten, bei dem die positiven Ladungsträger eine beliebig hohe Potentialdifferenz durchfallen haben. Infolge der Stöße, die sie erlitten haben, kommen sie mit einem entsprechenden Spektrum in das Übergangsgebiet zur Säule herein. In diesem Spektrum sind naturgemäß Teile, die mit einem endlichen Anodenfall nicht verträglich sind. Diese Lösung muß ausgeschlossen werden. Wir haben unser Augenmerk hauptsächlich darauf zu lenken, die richtige Lösung herauszufinden.

Auf eine Darstellung der Einzelheiten der numerischen Rechnung wollen wir verzichten¹³. Es ergibt sich, daß im Bereich $0 \leq x \leq 10^{-3}$ cm alle Lösungen näherungsweise gleich sind. Hier ist $v_{\text{th}}^2 \approx v_{\text{th,Säule}}^2$. Unterschiede treten erst auf, wenn die Variation von v_{th}^2 ins Spiel kommt. Für die richtige Lösung müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Die obere Grenze für den Zuwachs von v_{th}^2 ist gegeben durch die Forderung, daß das Ergebnis der Integration mit dem Energiesatz verträglich sein muß. Das bedeutet, daß der in thermische Energie umgewandelte Energiebetrag stets kleiner bleiben muß als die Anodenfallenergie.

2. Andererseits muß die thermische Energie der Ionen stets größer sein als die thermische Energie der neutralen Gaspartikel. Mit diesen Bedingungen ist die Lösung eindeutig.

¹³ Diese ist dargestellt in W. Bez, Kinetische Theorie des Anodenfalls, Diplomarbeit T. H. Stuttgart, 1953.

§ 6. Ergebnisse für das Übergangsgebiet

Die Ergebnisse der Rechnungen veranschaulichen die Abb. 3–7.

Die Raumladung (Abb. 3) bleibt im ersten Abschnitt des Übergangsgebietes, bis $x \approx 3 \cdot 10^{-3}$ cm, konstant. Der Zahlwert liegt bei $\frac{1}{2} \cdot 10^5$ cgs-E des Wertes von ϱ^- im Säulenbereich:

$$\begin{aligned} -4\pi\varrho &= 3 \cdot 10^2 \text{ cgs-E}, \\ \text{gegenüber } -4\pi\varrho_{-\text{Säule}} &= 7,5 \cdot 10^5 \text{ cgs-E} \end{aligned}$$

in der Säule. Der kleine, endliche Zahlwert für die Raumladung charakterisiert Sinn und Grenze der Quasineutralität der Bogensäule. Bei $x > 3 \cdot 10^{-3}$ cm steigt die Raumladung stark an und erreicht bei $x = 4,8 \cdot 10^{-3}$ cm ihr Maximum. Von hier ab ist ihr Verhalten durch die Größe der negativen Ladungsdichte bestimmt, da die positive Ladungsdichte inzwischen soweit abgesunken ist, daß sie vernachlässigt werden kann. Das Ende des Übergangsgebietes ist erreicht.

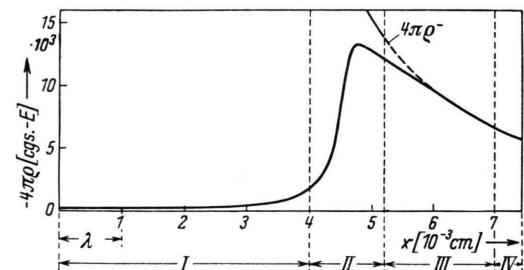


Abb. 3. Die Raumladung $-4\pi\varrho = 4\pi\varrho^- = 4\pi\varrho^+$. Im Beschleunigungsgebiet und Ionisationsgebiet wird die Raumladung praktisch allein durch $\varrho(x)$ bestimmt. I säulenartiger Teil, II Übergangsgebiet, III Beschleunigungsgebiet, IV Ionisationsgebiet. λ ($= \lambda_i$ im Text) kennzeichnet die Größe der freien Weglänge der Ionen.

Wir setzen als Dicke an $d_0' = 5,2 \cdot 10^{-3}$ cm. Hier ist $\varrho = \varrho^-/8$. Den Beginn des Übergangsgebietes bis $x = 4 \cdot 10^{-3}$ cm müssen wir sinnvoll wegen der dort herrschenden kleinen Raumladung der Säule zuschreiben. Damit reduziert sich die Dicke des Übergangsgebietes auf $d_0 = 1,2 \cdot 10^{-3}$ cm. Für alle etwaigen Vergleiche der Dicke des Anodenfallgebietes mit experimentellen Ergebnissen wird man diese Zahl benutzen müssen.

Da wir bei der Rechnung auch in dem Teil des Übergangsgebietes, der eine starke Ähnlichkeit zur Säule aufweist, die Fallformel für die Elektronenbewegung verwendeten, erhebt sich die Frage, ob die nach der Beweglichkeit errechnete Fortschreitungs geschwindigkeit der Elektronen nicht eine Veränderung des Ergebnisses bewirkt. Daß dies nicht der Fall ist, zeigt Tab. 2, die beide Grenzfälle der Rechnung miteinander vergleicht.

Man findet eine befriedigende Übereinstimmung der Spalten 2 und 3, die erst bei zunehmender Raumladung gestört wird. Es ist damit gezeigt, daß es keine Fehler-

quelle bedeutet, wenn wir den freien Fall der Elektronen, in der Rechnung formal bei Beginn des Übergangsgebietes beginnen lassen. In Wirklichkeit ist ja der Ort des Beginns der freien Fallbewegung statistisch verteilt. Doch da bei Verschiebung dieses Ortes über mehr als eine halbe Elektronenweglänge die Elektronengeschwindigkeit nicht beeinflußt wird, kann hier keine Fehlerquelle liegen.

$x [10^{-3} \text{ cm}]$	$v^-(x)/v^-(0)$ mit	$v^-(x)/v^-(0)$ mit
	$v^- = \sqrt{\frac{2e}{m} U + (b^-)^2 E_s^2}$	$v^- = b^- \cdot U'$
0	1	1
0,1	1,58	1,57
0,2	2,23	2,22
0,3	2,86	2,86
0,5	4,21	4,18
1,0	7,40	7,40
1,3	9,36	9,46
1,6	11,3	11,4
2,0	14,0	14,7
2,5	17,3	17,7
3,0	20,8	21,5
3,5	24,1	26,9
4,0	28,1	39,5

Tab. 2. Elektronengeschwindigkeiten zu Beginn des Fallgebietes, berechnet nach den Gesetzen des freien Falls (Spalte 2) und mittels Beweglichkeiten (Spalte 3). $v^-(0) = 2,016 \cdot 10^6 \text{ cm sec}^{-1}$.

Betrachten wir die thermische Energie der Ionen im Übergangsgebiet (vgl. Abb. 4), so zeigt sich im säulenähnlichen Teil des Gebietes, daß die thermische Energie der Ionen dort näherungsweise gleich der Energie des neutralen Gases ist. Sie steigt dann im

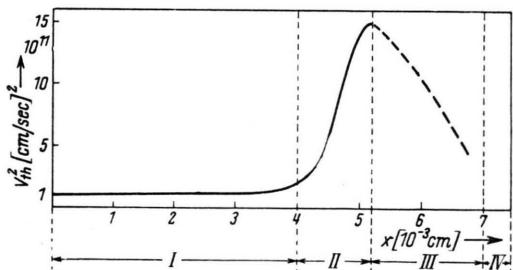


Abb. 4. Die thermische Energie der Ionen. I säulenartiger Teil, II Übergangsgebiet, III Beschleunigungsgebiet, IV Ionisationsgebiet.

eigentlichen Übergangsgebiet an und erreicht an seinem Ende ihr Maximum, um später wieder der Temperatur der neutralen Teilchen zuzustreben, aus denen die Ionen durch Stoßionisation entstanden sind. Wie die Abb. zeigt, übertrifft die Temperatur der Ionen in Teilen des Übergangsgebietes die Temperatur des neutralen Gases um eine Größenordnung. Unsere Aussage über die Ionentemperatur ist zweifellos nicht präzis, weil wir die Gastemperatur, um das Gleichungssystem

nicht noch komplizierter zu gestalten, konstant gesetzt haben. Wenn man berücksichtigt, daß das Gas im Fallgebiet praktisch allein durch die Ionen aufgeheizt wird, kann ein solch scharfes Maximum nicht auftreten. Es wird verschmiert und reduziert.

Die thermische Energie der Ionen hat in unserer Überlegung Bedeutung für den Umwegfaktor, d. h. dem Maß für die Abweichung der Ionenbewegung von einer reinen Fallbewegung. Diese Funktion zeigt im Übergangsgebiet in Richtung Säule ein ansteigendes Verhalten, s. Abb. 5. Dies bedeutet, daß die Bewegung,

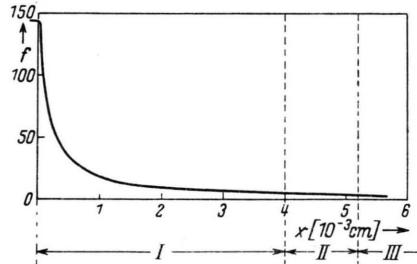


Abb. 5. Der Umwegfaktor für Ionen. I säulenartiger Teil, II Übergangsgebiet, III Beschleunigungsgebiet.

die im Ionisationsgebiet infolge der hohen Feldstärke eine Fallbewegung war, mit abnehmender Feldstärke immer ungeordneter wird, bis sie in der Bogensäule einen Grenzwert erreicht, der dem Gleichgewicht zwischen Energieaufnahme und Energieabgabe entspricht. Die eben besprochene Unsicherheit in der thermischen Energie der Ionen bedeutet für diesen Verlauf keine qualitative Änderung. Denn in jenem Gebiet, in dem die thermische Energie der Ionen unsicher ist ($x \approx 4 - 6 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$), ist der Umwegfaktor klein infolge der sehr hohen Feldstärke. An diesen Größenverhältnissen ändert sich nichts.

Den Verlauf von Spannung und Feldstärke zeigen die Abb. 6 und 7. Man vergleiche hiermit die empirischen Kurven von Finkelnburg^{4,5}.

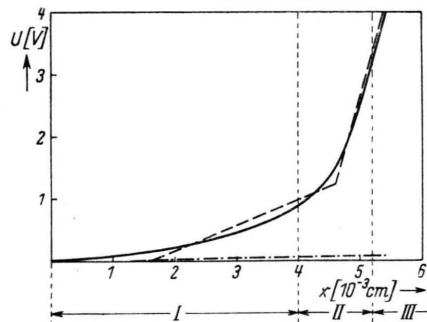


Abb. 6. Die Spannungsfunktion. Die gestrichelte Kurve schematisiert den Spannungsverlauf. Die Strich-Punkt-Kurve kennzeichnet den Spannungsverlauf bei konstanter Feldstärke $E = 15 \text{ V/cm}$ (Säulenbedingungen). I säulenartiger Teil, II Übergangsgebiet, III Beschleunigungsgebiet; das Ionisationsgebiet ist in Abb. 2 dargestellt.

Für die gleich zu besprechende Integration der Differentialgleichungen im Beschleunigungs- und Ionisationsgebiet benötigen wir die Randbedingungen am Ende des Übergangsgebietes. Setzen wir dieses Ende an den Punkt $x = 5,2 \cdot 10^{-3}$ cm, so gelten die folgenden Randwerte:

$$\begin{aligned} d_{\ddot{u}} &= 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \\ U(d_{\ddot{u}}) &= 1,068 \cdot 10^{-2} \text{ cgs-E.} = 3,2 \text{ V} \\ U'(d_{\ddot{u}}) &= 13,93 \text{ cgs-E.} = 4200 \text{ V/cm} \\ U''(d_{\ddot{u}}) &= 1,417 \cdot 10^4 \text{ cgs-E.} \end{aligned}$$

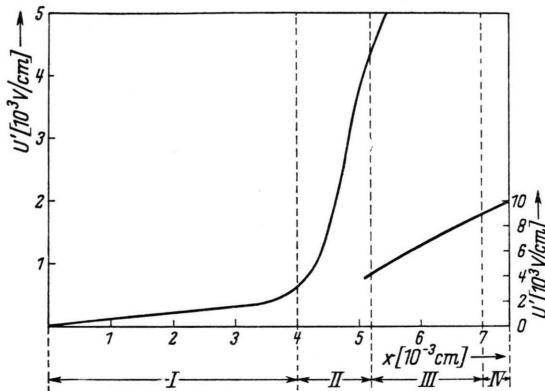


Abb. 7. Die Feldstärke. I säulenartiger Teil, II Übergangsgebiet, III Beschleunigungsgebiet, IV Ionisationsgebiet.

Damit sind die Konstanten in Gl. (11) zu berechnen:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4,111 \cdot 10^2 \text{ cgs-E.} \\ C_2 &= 6,224 \cdot 10^{-4} \text{ cgs-E.} \end{aligned}$$

§ 7. Beschleunigungsgebiet und Ionisationsgebiet

Für die das Ende des Beschleunigungsgebietes bestimmende Größe der Ionisierungsspannung U_i wählen wir einen Mittelwert aus den Ionisierungs- spannungen von Sauerstoff und Stickstoff:

$$U_i = 14,3 \text{ V.}$$

Wir sehen dabei vom Einfluß der Mikrofelder ab, die eine Erniedrigung dieser Ionisierungsspannung bis zu 1 V bewirken können. Außerdem wird ein möglicherweise vorliegender Anteil von Kohle am Trägergas, der aus dem Abbrand der Anode her- röhrt, nicht diskutiert.

Aus (11) ergibt sich, daß die Ionisierungsspannung $U_i = 14,3 \text{ V}$ bei $x = d_a = 2,99 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ erreicht ist. Hier ist das Beschleunigungsgebiet zu Ende und

das Ionisationsgebiet beginnt. Dies ist als Quelle des Ionenstroms charakterisiert, s. Gl. (6a). Der Ionenstrom verschwindet bei $x = d = d_a + 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$. Die Ausdehnung des Ionisierungsgebietes ist somit im Vergleich zum Beschleunigungsgebiet sehr gering.

Als Dicke des gesamten Anodenfallgebietes errechnet man

$$d = 3,44 \cdot 10^{-3} \text{ cm};$$

zum Vergleich: $\lambda_e = 5,50 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

Die bei der Anwendung der Fallformel für die Elektronenbewegung notwendige Bedingung $d \approx \lambda_e$ ist also gut erfüllt.

Die Anodenfallspannung wird

$$V_0 = 18,7 \text{ V.}$$

Die Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert von Finkelnburg $U_0 = 20 \pm 1 \text{ V}$ ist besser, als man auf Grund mannigfacher Unsicherheiten erwarten durfte.

§ 8. Diskussion des Ergebnisses

Diskutiert man die Verlässlichkeit unseres Resultates, so stellt sich heraus, daß das Ergebnis von manchen Unsicherheiten in den benutzten Zahlwerten und Vernachlässigungen in der Rechnung wenig beeinflußt wird.

a) Unsicherheit in den Konstanten. Eine Änderung der Konstanten und Randbedingungen an der Säule (E_s, b^-, b^+) im Rahmen konstanter äußerer Bedingungen bleibt ohne Einfluß auf den Wert der berechneten Anodenfallspannung. — Die bei Festlegung der Ionisierungsspannung gegebene Unsicherheit (eventuell -1 V) geht in gleicher Größe in die Anodenfallspannung ein (-1 V). Die größte Unsicherheit ist durch die Ausbeutefunktion bei Ionisierung durch Elektronenstoß [s. Gl. (2)] bedingt. Nehmen wir eine Verminderung bzw. Vergrößerung der Konstanten der differentiellen Ionisierung um einen Faktor 2 an, so würde sich die Anodenfallspannung um knapp $\pm 2 \text{ V}$ ändern.

Der Einfluß des Zahlwerts der freien Weglänge ist schwierig quantitativ zu diskutieren. Wir benutzten in der Rechnung Atomquerschnitte, die um 60% über den aus Röntgenstrahluntersuchungen an Kristallen folgenden liegen. Nach neuen Untersuchungen von Mäcker¹⁴ ist diese Zahl zu klein. Der gaskinetische Querschnitt liegt in der Größe der Ramsauer-Querschnitte. Auf Grund der Kinetik wird man sofort schließen, daß die Dicke des Anodenfalls sich proportional zu λ verhält. Formaler Ausdruck dieser Tatsache ist, daß in unseren Gleichungen durchweg die Quo-

¹⁴ H. Mäcker, Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckert-Werke in Erlangen (persönliche Mitteilung).

tienten x/λ vorkommen. Lediglich die Potentialgleichung macht eine Ausnahme. Sie bewirkt, daß die Anodenfalldicke schwächer als mit λ variiert. Das bedeutet praktisch, daß, wenn etwa $\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda/3$, die Anodenfalldicke d' nach dieser Änderung in den Grenzen

$$d > d' > \frac{d}{3}$$

liegt. Die Anodenfallspannung wird nicht wesentlich beeinflußt.

b) Der Fehler durch Vernachlässigung der Anregungsstöße. Bei der Ableitung unserer Stromgleichungen (§ 3) haben wir angenommen, daß alle Stöße der Elektronen im Anodenfallgebiet elastisch verlaufen. Ausgenommen von dieser Annahme waren die Stöße, die zur Ionisation des gestoßenen Atoms führten. Es tritt nun auch der Fall ein, daß Elektronen das gestoßene Atom zur Emission einer Spektrallinie anregen und dadurch Energie verlieren. Diese Elektronen nehmen im restlichen Anodenfall nicht mehr die nötige Energie auf, um als Ursache für einen Ionisationsprozeß in Frage kommen. Setzen wir an, daß alle

Elektronen, die nach Erreichen der Anregungsenergie stoßen, so viel Energie abgeben, daß sie hernach nicht mehr auf die Ionisationsenergie beschleunigt werden können, so ergibt sich eine Erhöhung der Spannung von 18,7 V auf 19 V. Dabei ist zweifellos der erste Wert bei sonst unveränderten Daten richtiger als der zweite, weil wir einen zu großen Verlust an Elektronen eingesetzt haben.

c) Statistische Effekte. In derselben Größenordnung wirkt sich eine exakte Berücksichtigung der statistischen Verteilung der Elektronenbewegung am Beginn des freien Falles aus. Wir haben in § 6 gezeigt, daß es für das Ergebnis keine Änderung bedeutet, wenn wir den Anodenfall zu Beginn mittels freifallender Elektronen oder mittels Beweglichkeiten berechnen. Anders ist es mit der Energieverteilung der Elektronen in der ungeordneten Bewegung. Die Zahl derjenigen Teilchen, die eine Energie $\approx e \cdot U_i$ mitbringen, ist aber so gering, daß sie ebenso wie die Elektronen, die durch Rekombination und Anregungsstöße verloren gehen, vernachlässigt werden können.

Energie-Impuls- und Ladungsdichte in der Kristensen-Møller-Theorie

Von HEINRICH GAUS

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. 9a, 81—90 [1954]; eingegangen am 22. September 1953)

Bei nichtlokalen Feldtheorien läßt sich (nach Ôno) ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor bestimmen, indem man die Nichtlokalität durch eine unendliche Reihe mit den höheren Ableitungen der Felder ersetzt und für die einzelnen Summanden den Tensor nach den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie berechnet. Nach diesem Verfahren wird für die Kristensen-Møller-Theorie ein Ausdruck für die Energie-Impuls-Dichte bestimmt. Der sich durch Integration über den Raum ergebende Gesamtimpuls ist identisch mit einem von Pauli durch Integration des Erhaltungssatzes gewonnenen Ausdruck. Es wird noch der Gesamtdrehimpuls durch Integration des Tensors berechnet. Ladungsdichte und Gesamtladung werden in analoger Weise bestimmt.

Im Rahmen der sogenannten nichtlokalen Feldtheorien ist kürzlich von Kristensen und Møller¹ für die Wechselwirkung von Nukleonen mit neutralen skalaren (oder pseudoskalaren) Mesonen eine Theorie untersucht worden, die nach dem üblichen Variationsverfahren aus der Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} J = & \int L_n d^4x + \int L_m d^4x \\ & + \int F(x'x''x''') \bar{\psi}(x') u(x'') \psi(x''') d^4x' d^4x'' d^4x''' \end{aligned} \quad (1)$$

folgt, worin L_n und L_m die bekannten Ausdrücke für die Lagrange-Dichten der freien Nukleonen bzw. Mesonen sind. Dabei ist der sogenannte Formfaktor

F eine Invariante, deren Wert nur von der relativen Lage der Punkte x', x'', x''' zueinander abhängt.

Für diese Theorie hat Pauli² die Integrale über Energie-Impuls- und Ladungsdichte berechnet. Im folgenden sollen Ausdrücke für die Dichten selbst abgeleitet werden. Dabei ist das Ergebnis nicht an die spezielle Gestalt der Feldgleichungen (1) gebunden, sondern gilt für jede aus einem Variationsverfahren folgende nichtlokale Theorie, deren Formfaktor lediglich eine Funktion der Abstände dreier Raumzeitpunkte $|x'' - x'''|$, $|x''' - x'|$, $|x' - x''|$ ist. Das benutzte Rechenverfahren stammt von Ôno³ und wurde von ihm auf Theorien mit

¹ P. Kristensen u. C. Møller, Kgl. danske Vidensk. Selsk., mat.-fysiske Medd. 27, Nr. 7 [1952].

² W. Pauli, Nuovo Cimento 10, 648 [1953].

³ Y. Ôno, Progr. theor. Physics 6, 898 [1951].